פרק א': הכרת שפת המתמטיקה

לפני שניגש לחקור את השפה המתמטית, שזאת היא מטרה מרכזית של לימוד הלוגיקה, נלמד להכיר ברמה לא פורמלית את השפה הזאת. גישתנו בשלב זה תהיה אינטואיטיבית, כאשר ההגדרות המדוייקות והדרך המדוייקת בה יש לפרש את רכיבי השפה יידונו בפרקים הבאים. כל פעם שנדבר על השפה נתכוון לשפה המתמטית שהיא נשוא הספר, אלא אם נאמר במפורש אחרת.

1.1 על מה מדברת שפה מתמטית? במבוא הבחנו בין התחביר של שפה לבין הסמנטיקה שלה, וגם בדיון המפורט שלנו בהמשך הספר נעמוד על הבחנה זאת, אולם בפרק זה נלמד להכיר יחד את תחביר השפה ואת המשמעות שלה. עוד בטרם ניגש לדון בביטויי השפה נראה על מה השפה מדברת. קיימת האפשרות לעסוק רק בשפה אחת המדברת על המתמטיקה כולה, אבל כפי שנראה אנו נפסיד הרבה אם נסתפק בכך. נוכל ללמוד הרבה גם על הלוגיקה וגם על תחומים מתמטיים רבים אם נתבונן גם בשפות העוסקות בתחום מצומצם בהרבה, כגון המיספרים הממשיים. לכן נראה את השפה כמדברת על קבוצה A מסויימת של עצמים שנקרא לה **העולם**, שאותה אנו משנים מפעם לפעם. מונח זה נבחר כי בזמן שהשפה מדברת על קבוצה A מסויימת היא מכירה רק בקיום העצמים שהם איברים של A ולא בעצמים אחרים.

כדי להגיע למידע מעניין על האיברים של העולם אנו זקוקים גם לפעולות ויחסים על העולם. למשל, לצורך פיתוח תורת המיספרים לא די לנו בקבוצת המיספרים הטיבעיים אלא אנו זקוקים גם ליחס הסדר ולפעולות החשבון על המיספרים הטיבעיים. לעולם יחד עם פעולות ויחסים עליו אנו קוראים **מבנה** (structure). כך מה שמעניין אותנו בעיקר במספרים הטיבעיים אינו עולם המספרים הטיבעיים אלא מבנה המספרים הטיבעיים המכיל, בנוסף על המספרים הטיבעיים, גם, נאמר, את החיבור, החיסור והכפל של מספרים אלו.

1.2 הסימנים האישיים הם הסימנים הראשונים בהם נעסוק. סימן אישי מסמן איבר של העולם. למשל, במיספרים הממשיים 0 ו-1 הם סימנים המסמנים מיספרים ממשיים מסויימים. גם x ו-y מסמנים מספרים ממשיים אבל הם אינם מסמנים מיספרים מסויימים כמו 0 ו-1. לכן נחלק את הסימנים האישיים לשני סוגים: **הקבועים האישיים** המסמנים איברים מסויימים של העולם ו**המשתנים האישיים** המסמנים איברים לא מסויימים של העולם. היכן שהדבר לא יגרום לאי הבנה נאמר "קבוע"" במקום "קבוע אישי" ו-"משתנה" במקום משתנה אישי.

דוגמאות נוספות לקבועים אישיים הם הסימנים $2, 3, \ldots, 9$, בתורת המיספרים הטיבעיים, הסימנים π ו-e בתורת המיספרים הממשיים, הסימן O בגיאומטריה האנליטית המסמן את ראשית הצירים, והסימן $\emptyset$ של הקבוצה הריקה בתורת הקבוצות. בנוסף על קבועים אישיים אלו נשתמש גם בקבועים אישיים נוספים וביניהם $\mathsf{c}_0, \mathsf{c}_1, \ldots$.

חשוב לנו להבחין היטב בין הקבוע האישי לבין האיבר של העולם אותו הוא מסמן, כי למשל הקבוע 0 הוא סימן בעוד המיספר 0 הוא מיספר. הקבוע 0 הוא בעל צורה אליפטית בעוד שלמיספר 0 אין צורה והוא האיבר הנייטרלי לגבי החיבור. חוסר ההפנמה של הבחנה זאת היא גורם נפוץ לשגיאות של תלמידים. מכיוון שבשלב הנוכחי אנו מעדיפים לא להקדיש לענין זה תשומת לב רבה לא נקפיד בפרק זה תמיד לבטא את ההבחנה בין הקבוע לבין האיבר אותו הוא מסמן. אני מקווה שהדבר לא יטשטש את הגבולות אצל הקורא, ובמידה ונגרם טשטוש כזה אני מקווה שאצליח לתקן את הנזק בפרקים הבאים.

למשתנים האישיים נשתמש בדרך כלל באותיות $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}$. משתנה אישי מסמן איבר של העולם היכול להשתנות לפי נסיבות העניין. למשל, בביטוי "לכל מיספר אי-שלילי x קיים מיספר y כך ש- $\mathsf{y}^2 = \mathsf{x}$ " x אינו מסמן מיספר מסויים אלא הוא "עובר" על כל המיספרים האי-שליליים. בהקשרים אחרים אנו משתמשים למשתנים בסימנים אחרים. למשל, בביטוי "בכל משולש ABC אם $\mathsf{AB} = \mathsf{AC}$ אז $\angle \mathsf{BCA} = \angle \mathsf{CBA}$" הסימנים $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ הם משתנים כי הם מסמנים נקודות אבל לא נקודות מסויימות.

1.3 סימני הפעולה. בעולם מתמטי בדרך כלל מעט מאוד איברים מסומנים ע"י קבועים. למשל, בתורת המיספרים רק המספרים השלמים מ-0 עד 9 מסומנים ע"י קבועים, ובגיאומטריה המישורית בכלל אין קבועים. למרות שדבר זה ברור לגמרי, שגיאה נפוצה מאוד בקרב התלמידים היא ההנחה שלכל איבר בעולם

יש קבוע המסמן אותו. עם זאת, לא רק הספרות מסמנות מיספרים מסויימים אלא גם ביטויים אחרים, כגון $2+3$ ו- -1, מסמנים מיספרים מסויימים. בתורת הקבוצות הביטוי $\{\emptyset\}$ מסמן קבוצה מסויימת. ביטויים אלו אינם קבועים אישיים כי הם אינם סימנים בודדים אלא הם ביטויים המורכבים ממיספר סימנים. בנוסף על הביטויים הללו המסמנים איברים מסויימים ועל המשתנים קיימים עוד ביטויים המסמנים איברים לא מסויימים. ביטויים כאלו הם $\mathsf{x}+2$ ו-"הקטע AB".

מה מסמן הביטוי $7+5$? הוא מסמן את המיספר המתקבל מ-5 ומ-7 ע"י פעולת החיבור. מה מסמן הביטוי "הקטע AB"? הוא מסמן את הקטע המתקבל מן הנקודות A, B ע"י הפעולה הנותנת לכל שתי נקודות את הקטע המחבר אותן. כך אנו משתמשים, באופן טיבעי, בסימני פעולה כדי לקבל ביטויים המסמנים איברים. למשל בעזרת סימן פעולת החיבור $+$ וסימן פעולת הכפל $\cdot$ אנו מקבלים את הביטויים $7+5$ ו- $9\cdot(5+7)$ המסמנים מיספרים מסויימים ואת הביטויים $3\cdot\mathsf{x}$ ו- $3\cdot\mathsf{x}+4\cdot\mathsf{y}$ המסמנים מיספרים לא מסויימים.

לאור הדוגמאות שראינו עלינו להכניס לשפה המתמטית את **סימני הפעולה** המסמנים פעולות כגון החיבור והכפל. פעולות החיבור והכפל, וכן גם הסימנים המסמנים אותן, הם פעולות וסימני פעולה דו מקומיים כי הם פועלים על שני איברים של העולם או על ביטויים המסמנים איברים של העולם. אנו גם נעסוק בפעולות ובסימני פעולה חד מקומיים, כמו פעולת הנגדי בביטוי $-x$, וגם בפעולות ובסימני פעולה בעלי יותר משני מקומות.

1.4 שמות עצם. לכל הביטויים המתקבלים מן הקבועים האישיים והמשתנים ע"י שימוש בסימני הפעולה, והמסמנים איברים של העולם, נקרא **שמות עצם**. לביטויים המסמנים עצמים מסויימים, כגון $7+5$ ו- $9\cdot(5+7)$, נקרא **שמות עצם קבועים**.

עד כה השתמשנו לציון הפעולות בסימני פעולה כגון $+$ ו-$\cdot$, בסוגריים מסולסלים כמו ב-$\{\emptyset\}$ ובמילים עבריות כמו ב-"קטע AB". פעולת הכפל גם מופיעה ללא סימן בביטוי $4\mathsf{x}+3\mathsf{y}$. כדי לפשט ולחדד את הדיון שלנו בשמות העצם נניח מעתה שכל הפעולות הבאות יחד עם העולמות השונים נתונות ע"י סימני פעולה. סימני פעולה דו-מקומית ייכתבו בדרך כלל בין הביטויים עליהם פועל הסימן, כמו הסימן $+$ בביטויים $7+5$ ו- $(\mathsf{y}-8)+3$, וסימני פעולה אחרים ייכתבו לפני הביטויים עליהם הם פועלים, כאשר ביטויים אלו מופרדים ע"י סימני פסיק, ומוקפים בסוגריים אם הדבר דרוש. כך נשתמש בסימן $-$ לפעולת הנגדי החד מקומית בביטויים -6 ו- $-\mathsf{x}\cdot\mathsf{y}$, ואם $t_1,\ldots,t_n$ שמות עצם ו-G הוא הסימן של פעולה n-מקומית G על העולם אז $\mathsf{G}(t_1,\ldots,t_n)$ הוא ביטוי המסמן את האיבר המתקבל ע"י הפעולה G מן האיברים ש- $t_1,\ldots,t_n$ מסמנים אותם. נדגיש שיש להבחין הבחן היטב בין סימן פעולה לבין הפעולה אותה הוא מסמן. סימן הפעולה הוא יצור של השפה, ולכשעצמו איננו קשור עם עולם כלשהו כי הוא יכול לסמן פעולות שונות בעולמות שונים. לעומת זאת פעולה n מקומית F על A היא פונקציה מ-A^n לתוך A בעולם A מסויים, וייתכן ששפה המתאימה לעולם A מסויים אינה מכילה כלל סימן לפעולה F. כדי לא להכביד על הקורא עם מערכת כפולה של סימנים אנו נשתמש בפרק זה באותו סימן מתמטי גם לפעולה וגם לסימן שלה. למשל, בסימנים $+, -, \cdot$ נשתמש גם לציון פעולות החיבור, החיסור והכפל, וגם לציון הסימנים שלהם. בהמשך הספר נדאג להפרדה מלאה בין הפעולות לבין סימניהן.

אם t הוא שם עצם קבוע המסמן איבר a של העולם נאמר ש-t הוא **שם** של a. ייתכנו, כמובן, שמות רבים לאותו איבר. למעלה הזכרנו שבדרך כלל מעט מאוד מאיברי העולם יש להם שם שהוא קבוע אישי. כעת כאשר הרחבנו את אפשרויות הסימון של איברים מסויימים ע"י שמות עצם קבועים יש בשפה, בדרך כלל, שמות ליותר איברים. למשל, במקרה של המיספרים הטיבעיים, כאשר עומדים לרשותנו הקבועים האישיים $0,1$ המסמנים את המיספרים $0,1$ וסימן פעולת החיבור $+$, אז לכל מיספר טיבעי יש שם שהוא $1+1+\ldots+1$ עם n מחוברים. אם נתבונן במיספרים השלמים עם הקבועים האישיים $0,1$ וסימן פעולת החיבור $+$ אז כמו לעיל, יש שמות לכל המיספרים הטיבעיים, אבל אין שמות למיספרים השליליים. אם נעבור לשפה עשירה יותר המכילה גם את סימן פעולת החיסור $-$ אז בשפה זאת יש שם גם לכל מיספר שלילי, ולכן לכל מיספר שלם. אם נתבונן במיספרים הממשיים עם הקבועים האישיים $0,1$ וסימני פעולות החיבור, החיסור והכפל אז נאמר בשלב זה כי רק למיעוט המיספרים הממשיים יש שמות, ונעסוק בכך יותר בהמשך הספר. בגיאומטריה המישורית בה אין קבועים אישיים אין גם שמות עצם קבועים ולכן לאף

נקודה אין שם. כך ראינו שאפשריים המצבים הקיצוניים שלכל איברי העולם שמות ושאין שם לאף איבר, וכן אפשריים גם מצבים בהם יש שמות למקצת איברי העולם אבל לא לכולם. ראינו גם שהעושר של השפה משפיע על כמות איברי העולם שיש להם שמות, כי במיספרים השלמים יש שמות ליותר מיספרים כאשר אנו מוסיפים לשפה את סימן החיסור. נחזור ונדגיש שיש להפריד בין שם עצם קבוע, שהוא יצור של השפה, לבין איבר העולם אותו הוא מסמן.

1.5 האמת והשקר. מה שיותר חשוב לנו מנתינת שמות למקצת איברי העולם או לכולם היא האפשרות להביע בשפה היגדים על העולם ועל איברים שלו. היגדים הם ביטויים האומרים משהו היכול להיות נכון או לא נכון. למשל "$2 = 1 + 1$" הוא היגד, ו-""כל משולש שווה שוקיים הוא גם שווה צלעות" הוא היגד. היגד יכול גם להתייחס לעצם לא מסויים כמו "x הוא זוגי". כדי לעסוק בהיגדים אנו צריכים לעסוק ביחסים על העולם A. תחילה נעסוק ביחסים דו-מקומיים. נתבונן ביחס הסדר $<$ על המיספרים הטיבעיים. מהו יחס זה? זה משהו הקיים לזוגות מסויימים של מיספרים טבעיים ולא קיים לזוגות אחרים. יחס זה קיים לזוג $\langle 5, 7\rangle$, ולכן אנו כותבים $5 < 7$, ואינו קיים לזוגות $\langle 3, 3\rangle$ ו- $\langle 8, 6\rangle$, ולכן אנו כותבים $3 \not< 3$ ו- $8 \not< 6$. אנו יכולים להתייחס למושג היחס כאל מושג מתמטי חדש המובן באופן אינטואיטיבי, ואת זה עשינו בכיתה א' כאשר למדנו על יחס הסדר על המיספרים הטיבעיים. אולם גישה זאת אינה מועדפת ע""י המתמטיקאים, המעדיפים להשתית את מושג היחס על המושגים המתמטיים הבסיסיים האחרים. הגישה המקובלת יותר היא לזהות יחס דו מקומי עם קבוצת הזוגות המקיימים את היחס הזה. כך יחס הסדר על המיספרים הטיבעיים הוא הקבוצה $\{\langle x, y\rangle \mid x < y\}$. לצורכי הלוגיקה עדיף ללכת בדרך שנתאר עתה.

מושג יסודי בסמנטיקה הוא מושג האמת, וליתר דיוק מושגי האמת והשקר. האמת והשקר הם שני עצמים שונים שנקרא להם **ערכי אמת** (truth values) ונסמנם ב-T (אמת), קיצור של True, וב-F (שקר), קיצור של False. מנקודת הראות של המוסר והדת אנו קושרים כתרים לאמת ומתעבים את השקר, אבל מנקודת הראות של המתמטיקה שניהם עצמים שווי זכויות. אמנם בהמשך נתבונן בסמנטיקה מן הזווית של האמת, אבל זה כמו להסתכל על חדר מצד אחד כאשר אפשר גם להסתכל בו גם מן הצד שני, ואם נחליף את מושגי האמת והשקר זה בזה, לא יחול בלוגיקה שום שינוי של ממש. בהמשך נעסוק מיספר פעמים בתכונת הדואליות שהיא הסימטריה של הלוגיקה ביחס להחלפת האמת והשקר זה בזה.

1.6 היחסים. בעזרת מושגי האמת והשקר אנו מגדירים יחס דו מקומי R על העולם A כפונקציה על הקבוצה A^2, שהיא קבוצת הזוגות של איברי A, לתוך קבוצת ערכי האמת $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$. אנו אומרים שהיחס R קיים בין האיברים x, y של A אם $R(x, y) = \mathsf{T}$, ואינו קיים בין איברים אלו אם $R(x, y) = \mathsf{F}$. כך יחס הסדר על קבוצת המיספרים הטיבעיים N היא הפונקציה

$$R(x, y) = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{אם } x < y \\ \mathsf{F} & \text{אחרת} \end{cases}$$

יחסים בעלי יותר משני מקומות מיוצגים באופן דומה ליחסים הדו מקומיים. ל- $n > 2$, יחסים n מקומיים על A ניתנים להצגה כקבוצות של n-יות של איברי A, כלומר כקבוצות חלקיות ל-A^n, וגם, כפי שנעשה כאן, כפונקציות על A^n לתוך $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$. יחס חד מקומי נקרא תכונה. כמו שנהגנו ביחסים הרב מקומיים אפשר לראות בתכונות על A קבוצות חלקיות ל-A, וגם פונקציות מ-A ל-$\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$.

שפה מכילה מיספר סימני יחס אשר כל אחד מהם מסמן יחס מסויים על העולם. אנו נשתמש לסימני היחס באותיות $\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}, \mathsf{S}$. כאשר הסימן מסמן, למשל, יחס דו מקומי נקרא לו סימן יחס דו מקומי, וכן ביחס למיספרי מקומות אחרים. עלינו להבחין היטב בין היחס לבין סימן שלו שהוא סימן יחס. סימן היחס הוא יצור של השפה ולכשעצמו איננו קשור עם עולם כלשהו כי הוא יכול לסמן יחסים שונים בעולמות שונים. לעומת זאת יחס הוא יחס בעולם A מסויים, וייתכן ששפה המתאימה לעולם זה אינה מכילה כלל סימן ליחס R. למרות הבחנה ברורה זאת בין יחס לסימן יחס, נשתמש בפרק זה, מסיבות של מסורת מתמטית, בסימן $<$ גם ליחס הסדר וגם לסימן שלו. היכן שהיחסים מסומנות באותיות נשתמש עבור היחסים באותיות הרישיות הרגילות המשמשות בכתיבה מתמטית, כגון R, ועבור הסימנים שלהן באותן אותיות בגופן "גיאומטרי" כמו R.

מיספר היחסים על A הוא גדול בהשוואה למיספר איברי A. אם A היא קבוצה סופית שמיספר

איבריה m אז מיספר הזוגות של איבריה הוא m^2 ומיספר היחסים על A הוא לכן 2^{m^2}. למשל, על קבוצה בת 5 איברים יש למעלה מ-30 מיליון יחסים דו-מקומיים. שפה מתמטית מכילה, בדרך כלל סימנים ליחסים בודדים מבין כל היחסים על העולם. יחס אחד חשוב במיוחד שתמיד נניח שיש לו סימן בשפה, אלא אם נאמר במפורש אחרת, הוא יחס הזהות, שנקרא לו גם שיוויון. שני איברים x, y נמצאים ביחס זה אםם הם אותו האיבר. אנחנו מסמנים את יחס הזהות בסימן השיוויון $=$, וסימן היחס בשפה המסמן אותו הוא $\approx$. בהמשך נראה איך מתפקדים הסימנים $=$ ו-$\approx$.

1.7 נוסחאות ופסוקים. באמצעות שמות העצם וסימני היחס אנו יכולים להביע היגדים בשפה. למשל, אנו יכולים לכתוב בעזרת שמות העצם 1 ו-$1+1$ את ההיגדים $1 < 1+1$ וגם $1 < 1+1$. גם $\mathsf{x} > 1$ הוא היגד בשפה. המונח הטכני שלנו להיגד של השפה הוא **נוסחה** (formula). לסימן יחס דו מקומי R ושמות עצם t_1, t_2 הביטוי $t_1 \mathsf{R} t_2$ הוא נוסחה. מה אומרת נוסחה זאת? היא אומרת שאיברי העולם המסומנים ע"י t_1 ו-t_2 נמצאים ביחס R. לסימני יחס R n מקומיים, כאשר $n \neq 2$, ולעיתים גם כאשר $n = 2$, הביטוי $\mathsf{R}(t_1, \ldots, t_n)$ הוא נוסחה האומרת ש-n-ית איברי העולם שהם הערכים של שמות העצם $t_1, \ldots, t_n$ מקיימת את היחס R שהסימן R מסמן.

נוסחה שאינה מכילה משתנים, כמו $1 < 1+1$ או $1 \approx 0$ מביעה עובדה מסויימת הקיימת, או שאינה קיימת, בעולם. לעומת זאת נוסחה המכילה משתנה אחד או יותר, כמו $\mathsf{x} \approx 1$ ו- $\mathsf{x} - \mathsf{y} < \mathsf{z} + 2$, אומרת משהו על ערכי המשתנים. לנוסחאות כנ"ל שאינן מכילות משתנים נקרא **פסוקים**. נדגיש שכל פסוק הוא נוסחה, אבל נוסחה כמו $\mathsf{x} \approx 1$ אינה פסוק.

נוסחה המביעה היגד שהוא אמיתי, לאור מה שמסמנים הקבועים וסימני הפעולה והיחס המופיעים בנוסחה, נקראת **אמיתית**, ונוסחה המביעה היגד שאינו אמיתי נקראת **שיקרית**. למשל, עם הסימונים המקובלים, הנוסחה $0 < 1 + 1$ היא אמיתית, והנוסחה $3 \approx 2 + 2$ היא שיקרית. אם הנוסחה מכילה משתנים אז היא אמיתית עבור ערכים מסויימים של המשתנים ושיקרית עבור ערכים אחרים. כך הנוסחה $5 < \mathsf{x} + 2$ אמיתית עבור ערכי x מ-4 ומעלה ושיקרית עבור ערכי x הקטנים מ-4. אנו אומרים שמבנה **מקיים** פסוק ϕ אם הפסוק אמיתי במבנה.

1.8 היגדים, נוסחאות ופסוקים. עתה הזמן להבהיר את המושגים של היגד, נוסחה ופסוק. היגד (statement) זה משהו שאנו רוצים לומר כדי לציין עובדה מסויימת, למשל שרומאו אוהב את יוליה. היגד מובע בשפה טבעית ע"י מה שנקרא "פסוק חווי". אותו היגד מובע בשפות שונות ע"י פסוקים שונים. למשל ההיגד הנ"ל מובע בעברית ע"י הפסוק "רומאו אוהב את יוליה" ובאנגלית ע"י הפסוק "Romeo loves Juliet". אנו מתייחסים כאן גם להיגדים התלויים במשתנים כגון "x הוא בן 20" ו-"x אוהב את y". בשפת המתמטיקה, בה אנו עוסקים, ההיגדים מובעים ע"י נוסחאות, ואם אלו היגדים ללא משתנים אז הם מובעים ע"י פסוקים. כך ההיגד ש-0 קטן מ-1 מובע ע"י הפסוק $0 < 1$.

1.9 הקשרים הפסוקיים. בעזרת הנוסחאות אותן פגשנו עד עתה אפשר להביע רק שמיספר איברים נמצאים באחד היחסים המסומנים ע"י סימני היחס של השפה, וזה מעט מאוד. יכולת ההבעה של השפה מועשרת ע"י הקשרים הפסוקיים (הק' מנוקדת בפתח והש' בקמץ) שנציג אותם עתה.

הקשר הפשוט ביותר הוא קשר **השלילה** שסימנו $\neg$. לכל נוסחה ϕ הנוסחה $\neg\phi$ אומרת את השלילה של מה ש-ϕ אומרת. למשל $\neg(\mathsf{x} < 2)$ אומרת ש-x אינו קטן מ-2 ו- $\neg(\mathsf{y} \approx \mathsf{x} + 3)$ אומרת ש-y שונה מ- $x + 3$. קשר זה הוא קשר חד מקומי כי בכל הפעלה שלו הוא פועל על נוסחה אחת.

קשר דו מקומי הוא קשר **הגימום** (שם הנגזר מן המילה "גם") שסימנו $\wedge$. הפעלתו על שתי הנוסחאות ϕ, ψ נותנת את הנוסחה $\phi \wedge \psi$ האומרת שקיים גם ϕ וגם ψ. כך הנוסחה $1 < \mathsf{x} \wedge \mathsf{x} < 3$ אומרת ש-x גדול מ-1 וקטן מ-3. במונחים של אמיתיות ושיקריות נאמר שהנוסחה $\phi \wedge \psi$ היא אמיתית כאשר ϕ ו-ψ שתיהן אמיתיות ושיקרית בכל מקרה אחר.

אנחנו יכולים להשתמש בנוסחה ביותר מקשר אחד, למשל להשתמש ב-$\neg\phi$ כאשר ϕ עצמה היא נוסחה המכילה קשרים. למשל, בגיאומטריה אנו נאמר ש- ABC הוא משולש, היכן ש- $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ הם משתנים, ע"י הנוסחה $\neg(\mathsf{A} \approx \mathsf{B}) \wedge \neg(\mathsf{A} \approx \mathsf{C}) \wedge \neg(\mathsf{B} \approx \mathsf{C})$. מכיוון שנרבה לפגוש בנוסחאות מהצורה $\neg(\mathsf{x} \approx \mathsf{y})$ נשתמש לנוסחאות כאלו בקיצור המקובל $\mathsf{x} \not\approx \mathsf{y}$, ונוסחה האומרת ש-$ABC$ הוא משולש היא

$\mathsf{A} \not\approx \mathsf{B} \wedge \mathsf{A} \not\approx \mathsf{C} \wedge \mathsf{B} \not\approx \mathsf{C}$.

קשר דו מקומי נוסף הוא קשר **האווי** (שם הנגזר מן המילה "או") שסימנו $\vee$. הפעלתו על שתי הנוסחאות ϕ, ψ נותנת את הנוסחה $\phi \vee \psi$ האומרת שקיים ϕ או ψ. למשל, אם $/$ היא פעולת החילוק השלם במיספרים הטיבעיים אז הנוסחה

$$\mathsf{x} \approx 2 \cdot (\mathsf{x}/2) \ \vee \ \mathsf{x} \approx 2 \cdot (\mathsf{x}/2) + 1 \tag{1}$$

אומרת ש-x הוא זוגי או איזוגי. אם P הוא סימן התכונה של "להיות ראשוני" אז הנוסחה

$$\mathsf{x} \approx 2 \cdot (\mathsf{x}/2) \ \vee \ \mathsf{P}(\mathsf{x}) \tag{2}$$

אומרת ש-x הוא זוגי או ראשוני. ב-(1), לכל מיספר טבעי x רק אחת משתי הנוסחאות המשתתפות באווי היא אמיתית. ב-(2), עבור המיספר $x = 2$ שתי הנוסחאות הן אמיתיות, ויש להניח שאנו מתייחסים אל הנוסחה (2) כולה כאמיתית גם עבור המיספר $x = 2$. בשפה טיבעית, כאשר אומרים "ϕ או ψ" לפעמים מתכוונים לכך שלפחות אחד מ- ϕ, ψ מתקיים ואולי גם שניהם כמו במשפט "אם אתה מתעניין במתמטיקה או אם אתה מתעניין בפילוסופיה אז כדאי לך ללמוד לוגיקה", ולפעמים מתכוונים לכך שבדיוק אחד מ- ϕ, ψ מתקיים כמו במשפט "את יכולה לקנות את הספר או לקחת אותו בהשאלה". "או" במשמעות הראשונה נקרא "או כולל" (inclusive or), ו-"או" במשמעות השניה נקרא "או מוציא" (exclusive or). בשפה המתמטית המילה "או" משמשת רק במובן של האו הכולל. במונחים של אמיתיות ושיקריות נאמר שהנוסחה $\phi \vee \psi$ היא אמיתית כאשר לפחות אחת משתי הנוסחאות ϕ ו-ψ היא אמיתית ושיקרית כאשר ϕ ו-ψ שתיהן שיקריות. כמובן שבשפה המתמטית אפשר לבטא את ההיגד שבדיוק אחד מ- ϕ, ψ מתקיים, למשל ע"י הנוסחה $(\phi \vee \psi) \wedge \neg(\phi \wedge \psi)$.

עוד קשר דו מקומי הוא קשר **האימוז** (שם הנגזר מן הצרוף "אם . . . אז") שסימנו $\rightarrow$. הפעלתו על שתי הנוסחאות ϕ, ψ נותנת את הנוסחה $\phi \rightarrow \psi$ האומרת "אם ϕ אז ψ". הקשר בין האימוז בשפה המתמטית לבין "אם . . . אז" בשפה טיבעית הוא עוד יותר בעייתי ממה שראינו במקרה של "או". בשפה טיבעית משמש הצרוף "אם . . . אז" על פי רוב להבעת סיבתיות. למשל במשפט "אם תשקיע הרבה בלימודיך תגיע להישגים מצויינים" ההשקעה בלימודים היא הסיבה להישגים המצויינים. בשפה טיבעית יש לעיתים לצרוף "אם . . . אז" גם משמעות אחרת כמו במשפט "אם יש על הפיטריה כתמים אדומים אז היא רעילה". כאן לא מדובר על סיבתיות, כי הכתמים האדומים אינם הסיבה לכך שהפיטריה רעילה. מה שמשפט זה אומר הוא שלא יתכן שלפיטריה יש כתמים אדומים והיא אינה רעילה, אבל הוא אינו מכחיש את קיומן של פיטריות רעילות עם כתמים אדומים, פיטריות רעילות ללא כתמים אדומים ופיטריות לא רעילות ללא כתמים אדומים.

נבחן את האפשרות של מתן משמעות לכל נוסחה $\phi \rightarrow \psi$, ובעברית "אם ϕ אז ψ", לאור הדוגמה האחרונה בה ϕ היא "על הפיטריה יש כתמים אדומים" ו-ψ היא "הפיטריה היא רעילה". ערך האמת אותו יש לתת לנוסחה $\phi \rightarrow \psi$ הוא ברור לגמרי כאשר ϕ אמיתית. אם ϕ ו-ψ שתיהן אמיתיות אז נאמר ש- $\phi \rightarrow \psi$ אמיתית, כי בדוגמה שלנו אם לפנינו פיטריה עם כתמים אדומים שהיא רעילה אז הפסוק "אם יש על הפיטריה כתמים אדומים אז היא רעילה" נכון לפיטריה זאת. אם ϕ אמיתית ו-ψ שיקרית אז נאמר ש- $\phi \rightarrow \psi$ שיקרית, כי בדוגמה שלנו אם לפנינו פיטריה עם כתמים אדומים שאינה רעילה אז הפסוק "אם יש על הפיטריה כתמים אדומים אז היא רעילה" בוודאי שהוא שיקרי לפיטריה זאת. כעת נראה מה עלינו לעשות במקרים בהם ϕ הוא שיקרי. ניקח פיטריה ללא כתמים אדומים ונשאל אם עבורה המשפט "אם יש על הפיטריה כתמים אדומים אז היא רעילה" הוא אמיתי או שיקרי. אפשר להתחמק מלתת ערך אמת למשפט זה במקרה זה, אבל זה רק יסבך את הטיפול שלנו ולא יקנה יתרון משום בחינה, ולכן עלינו לקבוע ערך אמת במקרה זה. אם ניתן למשפט זה את הערך "שקר" עבור איזושהי פיטריה ללא כתמים אדומים אז מתברר שקיום פטריה ללא כתמים אדומים, היכולה להיות רעילה או לא, גורמת לכך שהמשפט "אם יש על הפיטריה כתמים אדומים אז היא רעילה" לא יהיה אמיתי תמיד, בעוד שברור לנו כי רק אם קיימת פיטריה עם כתמים אדומים שאינה רעילה נאמר שפסוק זה אינו אמיתי תמיד. לכן עלינו להחליט שהמשפט "אם יש על הפיטריה כתמים אדומים אז היא רעילה" אמיתי לכל פטריה ללא כתמים אדומים בין אם היא רעילה או לא. נתרגם זאת למקרה הכללי. אנו נקבע לשפה המתמטית שהנוסחה $\phi \rightarrow \psi$ אמיתית כאשר ϕ ו-ψ

אמיתיים, וגם כאשר ϕ שיקרי בין אם ψ אמיתי או לא, והנוסחה $\phi \to \psi$ היא שיקרית כאשר ϕ אמיתית ו-ψ שיקרית. מכיוון שהמשמעות שאנו מייחסים לקשר האימוז אינה כוללת סיבתיות איננו קוראים לקשר זה בשם "גרירה" כי למילה "גרירה" ישנה משמעות של קשר סיבתי שאנו רוצים להימנע ממנה.

מועמד נוסף לקשר דו מקומי הוא קשר **האימום** (שם הנגזר מן הצרוף "... אם ורק אם ...", ובקצור... אסם ...") שסימנו $\leftrightarrow$. הפעלתו על שתי הנוסחאות ϕ, ψ נותנת את הנוסחה $\phi \leftrightarrow \psi$ האומרת "ϕ אסם ψ". הכוונה היא לקבל נוסחה $\phi \leftrightarrow \psi$ שהיא אמיתית כאשר ϕ ו-ψ שניהם אמיתיים וגם כאשר ϕ ו-ψ שניהם שיקריים, והיא שיקרית כאשר אחת משתי הנוסחאות ϕ ו-ψ היא אמיתית והשניה היא שיקרית. הוספת סימן קשר נוסף לשפה מפשטת את הכתיבה בשפה ומצד שני מסבכת את הדיון בשפה, ועלינו לשקול בכל מקרה מהו השיקול המכריע. במקרה של האימום נבחר לא להוסיף לשפה קשר כזה, כי את מה ש- $\phi \leftrightarrow \psi$ אומרת אפשר גם לומר ע"י הנוסחה $(\neg\phi \wedge \neg\psi) \vee (\phi \wedge \psi)$, וגם ע"י הנוסחה $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$. אנו בכל זאת נשתמש בכתיבה $\phi \leftrightarrow \psi$, לא כשימוש בסימן קשר חדש אלא כקיצור לאחת הנוסחאות $(\neg\phi \wedge \neg\psi) \vee (\phi \wedge \psi)$ או $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.

1.10 הכמתים. בזה סיימנו את תאור הקשרים הפסוקיים של השפה. בשלב זה אנו כבר מכירים נוסחאות כמו $F(x)\, R\, G(H(y), x) \to (H(z) \approx G(y,z) \vee x\, R\, z)$, אבל עדיין השפה היא דלה, ואפילו היגד פשוט כמו "אם לכל x ו-y קיים $x + y \approx y + x$ אז קיים $a + b \approx b + a$" לא ניתן להבעה בה, ולכן נרחיב שוב את השפה. עם זאת התפקיד של הקשרים בשפה המתמטית הוא תפקיד חשוב ומעניין ונאמר עליו רבות בהמשך. נשים לב שהמשמעות של הקשרים אינה תלויה בכלל בעולם עליו מדברת השפה, והם פועלים על ערכי האמת ללא פזילה לעולם. לעומת זאת, המשמעות של רכיבי השפה בהם נעסוק עתה, שהם הכמתים, קשורה באופן הדוק ביותר עם העולם עליו השפה מדברת.

השפה מכילה שני סימנים הנקראים **כמתים** שהם $\forall$ הנקרא **הכמת הכולל** ו-$\exists$ הנקרא **הכמת הישי**. בהינתן נוסחה ϕ אנו יוצרים ממנה נוסחה חדשה שבתחילתה כמת, אחריו משתנה ואחריו הנוסחה ϕ, בתוספת סוגריים היכן שזה דרוש, כמו ב- $\forall \mathsf{x}\phi$ וב- $\exists \mathsf{y}\phi$. את הנוסחאות הללו אנו קוראים "לכל x קיים ϕ" ו-"קיים y כך ש-ϕ". הנוסחה ϕ כאן תהיה, בדרך כלל, נוסחה האומרת משהו על x כמו, למשל, ב- $\forall \mathsf{x}(\mathsf{x} \approx \mathsf{x})$ וב- $\forall \mathsf{x}\neg(\mathsf{x} < \mathsf{x})$, ו-$\psi$ תהיה נוסחה האומרת משהו על y כמו ב- $\exists \mathsf{y}(\mathsf{y} + \mathsf{y} \approx \mathsf{y})$. דוגמא מסובכת יותר היא הפסוק $\forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y}(\mathsf{x} < \mathsf{y})$ האומר שלכל x יש y הגדול ממנו. פסוק זה אמיתי בעולם המיספרים הטיבעיים, ואינו אמיתי בעולם המיספרים השלמים השליליים. דוגמא נוספת היא הפסוק $\exists \mathsf{x} \forall \mathsf{y}(\mathsf{y} + \mathsf{x} \approx \mathsf{y})$, שהוא אמיתי בעולם המיספרים השלמים ואינו אמיתי בעולם המיספרים השלמים החיוביים. במילים אחרות, עולם המיספרים השלמים מקיים את הפסוק $\exists \mathsf{x} \forall \mathsf{y}(\mathsf{y} + \mathsf{x} \approx \mathsf{y})$, ואילו עולם המיספרים השלמים החיוביים אינו מקיים את הפסוק הזה.

בזה סיימנו את תאור השפה המתמטית הנקראת **תחשיב היחסים מסדר ראשון** (First Order Predicate Calculus), ובקיצור **תחשיב היחסים**. תפקיד התואר "מסדר ראשון" יובהר בהמשך. שפה זאת היא השפה המתמטית המקובלת בה אפשר להביע את כל הטענות המתמטיות, ונראה עתה דוגמאות רבות לכך.

1.11 דוגמאות. לפני שניגש לדוגמאות השונות נאמר שבכל אחת מהדוגמאות נציין מהי השפה בה אנו משתמשים באותה דוגמה. כמובן שבכל שפה של תחשיב היחסים נמצאים המשתנים, סימני הקשרים, הכמתים וסימן השיוויון $\approx$. לכן אין כל צורך לציין סימנים אלו בתאור של שפה ספציפית, ונזכיר בתאור זה רק את הסימנים המיוחדים לשפה זאת. כך נאמר, למשל, ששפה מתאימה למיספרים הממשיים היא $L = \{+, \cdot, <\}$.

בשלב ראשון נראה דוגמאות בשפה $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ של תורת השדות. כאן אנו עוסקים בעולם בו יש שתי פעולות דו מקומיות שהן $+$, הנקראת חיבור, ו-$\cdot$, הנקראת כפל, וכן שני איברים המסומנים ע"י קבועים שהם 0, הנקרא אפס, ו-1, הנקרא אחד.

נכתוב עתה בשפת תחשיב היחסים מיספר היגדים חשובים על עולם זה.

א. חוק החילוף לחיבור $\forall \mathsf{x} \forall \mathsf{y}(\mathsf{x} + \mathsf{y} \approx \mathsf{y} + \mathsf{x})$

ואנו קוראים זאת "לכל x ולכל y, $x + y$ שווה ל-$y + x$".

ב. חוק הקיבוץ לחיבור $\forall x \forall y \forall z((x+y)+z \approx x+(y+z))$

ג. נייטרליות האפס ביחס לחיבור $\forall x(x+0 \approx x)$

ד. קיום איבר נגדי $\forall x \exists y(x+y \approx 0)$

ה. חוק הקיבוץ לכפל $\forall x \forall y \forall z((x \cdot y) \cdot z \approx x \cdot (y \cdot z))$

ו. חוקי הפילוג לכפל $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y+z) \approx x \cdot y + x \cdot z)$
$\forall x \forall y \forall z((y+z) \cdot x \approx y \cdot x + z \cdot x)$

בשני הפסוקים האחרונים השמטנו סוגרים לפי הכללים המקובלים לגבי ביטויים אלגבריים.

מבנה המקיים את הפסוקים א'-ו' נקרא **חוג**. מוכרים לנו חוגים רבים, למשל המספרים השלמים הזוגיים, המספרים הממשיים, והמטריצות 3×3 מעל לממשיים.

חוג נקרא **חוג חילופי** אם הוא מקיים גם את: ז. חוק החילוף לכפל $\forall x \forall y(x \cdot y \approx y \cdot x)$

את ההיגד שהחוג הוא **חוג עם יחידה** אנו כותבים באמצעות שני הפסוקים $1 \not\approx 0$
(זה קיצור ל- $\neg(1 \approx 0)$)

ונייטרליות 1 לגבי הכפל $\forall x(1 \cdot x \approx x \wedge x \cdot 1 \approx x)$

שדה הוא חוג חילופי עם יחידה המקיים את הפסוק:

קיום איבר הופכי $\forall x(x \not\approx 0 \rightarrow \exists y(x \cdot y \approx 1))$

את ההיגד שהשדה הוא בעל המציין p אנו כותבים ע"י הפסוק $\overbrace{(\ldots(1+1)+1)+\ldots)+1}^{p \text{ מחוברים}} \approx 0$

את ההיגד שהשדה הוא בעל המציין 0 ניתן לבטא ע"י הקבוצה האינסופית של הפסוקים

$$\overbrace{(\ldots(1+1)+1)+\ldots)+1}^{n \text{ מחוברים}} \not\approx 0$$

לכל מספר $n > 1$. את קבוצת הפסוקים הזאת אי אפשר להפוך לפסוק אחד ע"י הוספת $\forall p$ בתחילת הפסוק, כי פסוק נתון הוא בעל אורך קבוע ולכן מיספר ה-1-ים המופיעים בו הוא מיספר קבוע ולא משתנה. בהמשך הספר נראה שגם בכל דרך אחרת אי אפשר להביע היגד זה בשפה הנוכחית ע"י פסוק אחד.

1.12 תרגילים. א. כתוב נוסחאות בשפה $L=\{+,\cdot,0,1\}$ המביעים את ההיגדים הבאים.

(i) x הוא ריבוע.

(ii) לכל x, אם x מתחלף בכפל עם כל האיברים אז ריבועו הוא 1.

(iii) לכל x שאינו 0 קיים y השונה מ-x ושריבועו שווה לריבוע x.

(iv) אם סכום של 6 מחוברים שכל אחד מהם הוא 1 הוא 0, אז סכום כזה של 3 מחוברים הוא 0 או 1.

(v) למשוואה הלינארית ב-x שמקדמיה הם a, b יש פיתרון.

(vi) לכל משוואה לינארית יש פתרון אחד ורק אחד. שים לב שבמשוואה לינארית המקדם של x אינו 0.

(vii) לכל משוואה ריבועית יש פתרון.

ב. חוג חילופי נקרא **תחום שלמות** אם אין בו מחלקי אפס לא טריביאליים, כלומר מכפלה היא 0 רק אם לפחות אחד הכופלים הוא 0. כתוב פסוק האומר זאת.

ג. שדה נקרא סגור אלגברית אם לכל פולינום מעל לשדה ממעלה 1 ומעלה יש שורש בשדה. כתוב, באמצעות אינסוף פסוקים, פסוק אחד לכל מעלה n, את ההיגד שהשדה סגור אלגברית.

כפי שהערנו שאי אפשר לכתוב את ההיגד שהשדה הוא בעל מציין 0 ע"י פסוק בודד כך אי אפשר גם לכתוב שהשדה הוא סגור אלגברית ע"י פסוק בודד.

נתבונן כעת במבנה שהוא חוג ויש לו קבוצה חלקית S שאנו רוצים להתייחס אליה, למשל אם העולם הוא קבוצת כל המטריצות 3×3 מעל לממשיים, והקבוצה החלקית היא קבוצת אותן מטריצות שכל רכיביהן שלמים. נסמן את הקבוצה החלקית ע"י סימן היחס החד-מקומי S. את ההיגד שכל איבר של הקבוצה S מתחלף בכפל עם כל איברי החוג נכתוב ע"י הפסוק $\forall x(S(x) \rightarrow \forall y(x \cdot y \approx y \cdot x))$

ואפשר לכתוב זאת גם ע"י $\forall x \forall y(S(x) \rightarrow x \cdot y \approx y \cdot x)$

את ההיגד שלכל איבר של S הוא ריבוע של איבר של S נכתוב ע"י $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(S(y) \wedge y \cdot y \approx x))$

או ע"י $\forall x \exists y(S(x) \to S(y) \land y \cdot y \approx x))$

1.13 תרגילים. א. S נקראת **תת-חוג** של העולם אם S, עם פעולות החיבור והכפל של העולם מהווה חוג. אם העולם הוא חוג אז קל לראות כי S היא תת חוג אם היא סגורה לגבי החיבור והכפל (כלומר הסכום והמכפלה של איברי S נמצאים ב-S) ולכל איבר של S יש נגדי ב-S. כתוב פסוק או פסוקים המביעים היגדים אלו.

ב. כתוב את הפסוק האומר שלכל משוואה לינארית שמקדמיה ב-S יש פיתרון שהוא איבר של S או שיש לו נגדי ב-S.

נעסוק עתה בשפה $L = \{<\}$ בה $<$ הוא סימן יחס דו-מקומי. את ההיגדים האומרים שהיחס $<$ הוא יחס סדר חלקי אנו כותבים כך:

אירפלקסיביות $\forall x \neg(x < x)$

טרנזיטיביות $\forall x \forall y \forall z(x < y \land y < z \to x < z)$

אם $<$ הוא יחס סדר חלקי אז הוא יחס סדר מלא אם הוא גם מקיים את הפסוק

$\forall x \forall y(x \not\approx y \to x < y \lor y < x)$

1.14 תרגילים. א. בשפה $L = \{<\}$ כתוב נוסחה האומרת ש-z נמצא בין x ל-y (כאשר x, y הם איברים כלשהם), לא כולל את x, y עצמם.

ב. בשפה $L = \{\leq\}$ בה $\leq$ הוא סימן יחס דו-מקומי כתוב את הפסוקים האומרים ש-$\leq$ הוא יחס סדר במובן של "קטן או שווה ל-".

ג. בשפה $L = \{\leq\}$ כתוב נוסחה האומרת ש-z נמצא בין x ל-y (כאשר x, y הם איברים כלשהם), לא כולל את x, y עצמם.

ד. בשפה $L = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ אפשר לטפל במושג השדה הסדור. שדה סדור הוא שדה שיש עליו יחס סדר, והקשר בין פעולות השדה ויחס הסדר נתון ע"י האקסיומות הבאות: לכל איברי השדה הסדור, אם $x < y$ אז גם $x + z < y + z$, אם $x < y$ ו-$0 < z$ אז גם $x \cdot z < y \cdot z$. הבע את ההיגדים הללו ע"י פסוקים בשפה L.

ה. שדה סדור F נקרא סגור ממשית אם לכל איבר חיובי (כלומר, גדול מ-0) בו יש שורש ריבועי, ולכל פולינום ממעלה איזוגית מעל F יש שורש ב-F. הבע היגדים אלו כפסוקים בשפה L.

נעבור עתה לדוגמה בעלת אופי שונה והיא הגיאומטריה המישורית. תחילה נתבונן בעולם המכיל רק נקודות ובו מושג הישר מופיע באמצעות יחס ההימצאות על ישר אחד של נקודות. על עולם הנקודות נתונים שני יחסים, יחס תלת-מקומי B ויחס ארבע-מקומי E. הנקודות x, y, z נמצאות ביחס B כאשר x, y, z נמצאות על ישר אחד והנקודה y נמצאת בין הנקודות x ו-z (ושונה מ-x ומ-z). הנקודות x, y, z, u נמצאות ביחס E אם אורך הקטע xy שווה לאורך הקטע zu. שפה מתאימה היא $L = \{B, E\}$.

1.15 תרגילים. א. כתוב נוסחה האומרת שהנקודות x, y, z נמצאות על ישר אחד.

ב. כתוב נוסחה האומרת שלכל הנקודות x, y, z, אם y בין x ל-z אז שלוש הנקודות שונות זו מזו, y היא גם בין z ל-x, ו-z אינה בין x ל-y.

אנו נרצה להשתמש מספר פעמים בנוסחה כמו ב-1.15א' האומרת ששלוש נקודות הן על ישר אחד. מכיוון שהנוסחה של 1.15א' היא ארוכה יחסית נסמן אותה כ-$\phi(x, y, z)$. כאשר נחליף בקיצור זה את המשתנים x, y, z במשתנים אחרים, למשל u, v, w ונכתוב $\phi(u, v, w)$ נתכוון לנוסחה שהיא כמו $\phi(x, y, z)$ רק שהמשתנים x, y, z הוחלפו בה ל-u, v, w. כמובן ש-$\phi(u, v, w)$ היא נוסחה האומרת שהנקודות u, v, w נמצאות על ישר אחד. נביא שתי דוגמאות לשימוש בקיצור $\phi(x, y, z)$. את ההיגד שהנקודות x, y, z יוצרות משולש נכתוב ע"י $\neg\phi(x, y, z)$. את ההיגד ש-x, y יוצרות ישר והנקודות u, v נמצאות משני הצדדים של ישר זה נכתוב ע"י $x \not\approx y \land \neg\phi(x, y, u) \land \exists z(\phi(x, y, z) \land B(u, z, v))$.

1.16 תרגילים. א. כתוב נוסחה האומרת ש-x, y יוצרות ישר והנקודות u, v נמצאות באותו צד של ישר זה.

ב. כתוב פסוק המביע את אקסיומת פש האומרת שלכל משולש ולכל ישר שאינו עובר דרך קודקודי המשולש, אם הישר חותך את אחת הצלעות של המשולש אז הוא גם חותך צלע אחרת של המשולש.

בדרך בה נקטנו עד כאן לא התייחסנו אל הישרים כאל עצמים ובמקום זה דברנו על התכונה של

נקודות להיות על ישר אחד. דרך אחרת היא לעסוק בעולם שהעצמים שלו הם גם הנקודות וגם הישרים. אנו נפגוש גם דוגמאות נוספות בהן העולם מורכב משני סוגי עצמים, ואף מיותר סוגים של עצמים. נראה כיצד הדבר נעשה במקרה הנוכחי והטיפול במקרים האחרים דומה מאוד.

במקרה הנוכחי העולם הוא קבוצת כל הנקודות והישרים. היחסים שיש להם שמות בשפה הם הבאים. יחס חד-מקומי P שהעצמים המקיימים אותו הם הנקודות, יחס חד-מקומי L שהעצמים המקיימים אותו הם הישרים, יחס דו-מקומי I כך ש- xIy אם x נקודה, y ישר והנקודה x נמצאת על הישר y. הצורה הנוכחית של היחסים B ו-E היא שהעצמים x, y, z מקיימים את B כאשר x, y, z הם נקודות הנמצאות על ישר אחד והנקודה y נמצאת בין x ל-z, והעצמים x, y, z, u נמצאים ביחס E אם כולם נקודות והמרחק בין x ל-y שווה למרחק בין z ל-u. את ההיגד שהנקודות x, y, z נמצאות על ישר אחד נכתוב ע"י $\exists u(xIu \wedge yIu \wedge zIu)$. שים לב שלא כתבנו במפורש ש-u הוא ישר כי מכך שקיים xIu כבר נובע ש-u הוא ישר. את ההיגד שכל שתי נקודות שונות קובעות ישר יחיד אנו כותבים ע"י

$\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \wedge x \not\approx y \rightarrow \exists z(xIz \wedge yIz \wedge \forall u(xIu \wedge yIu \rightarrow u \approx z)))$.

1.17 תרגילים. א. כתוב נוסחה המביעה שהישרים u ו-v מקבילים.

ב.כתוב את אקסיומת המקבילים שלכל ישר ונקודה מחוצה לו יש דרך הנקודה בדיוק ישר אחד המקביל לישר הנתון.

ג. כתוב את אקסיומת פש של 1.16 בשפה הנוכחית.

דוגמה נוספת לעולם עם שני סוגי עצמים היא מרחב וקטורי מעל שדה F. העצמים בעולם הם איברי השדה F (הסקלרים) והווקטורים. השפה היא $L = \{S, V, +, \cdot\}$ היכן ש-S הוא סימן יחס חד-מקומי המסמן את התכונה להיות סקלר, V הוא סימן יחס חד-מקומי המסמן את התכונה להיות וקטור, ו-$+$ ו-$\cdot$ הם סימני הפעולה הדו-מקומיים המסמנים את פעולות החיבור והכפל. למרות שחיבור הסקלרים וחיבור הווקטורים הם שתי פעולות שונות אפשר לסמן באותו סימן, וכן לכפל סקלרים וכפל של סקלר בווקטור. חוק הקיבוץ של הכפל בשדה נכתב ע"י $\forall x \forall y \forall z(F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z)$. אחד מחוקי הכפל של ווקטור בסקלר הוא $\forall x \forall y \forall z(F(x) \wedge F(y) \wedge V(z) \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z)$.

1.18 תרגילים. א. כתוב בשפה L דלעיל את ההיגדים הבאים.

(i) מכפלת ווקטור בסכום של שני סקלרים שווה לסכום המכפלות של הווקטור בכל אחד מהסקלרים בנפרד.

(ii) מכפלת סקלר בווקטור היא ווקטור.

(iii) לכל ווקטור קיים וקטור נגדי (שים לב שלא תחרוג מן השפה L).

ב. תהי L השפה $\{+, \cdot, <, 0, 1, F\}$ היכן ש-F הוא סימן פעולה חד מקומי. עבור העולם של המיספרים הממשיים כתוב בשפה L את ההיגדים הבאים:

א. F היא פונקציה חסומה.

ב. הערך המוחלט של F חסום ע"י פולינום ריבועי.

ג. F היא פונקציה רציפה.

ד. F היא פוקציה רציפה במידה שווה.